§ 8. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

В соответствии с принципом Даламбера для любой механической системы активные силы, силы реакций связей вместе с силами инерции удовлетворяют условию равновесия сил для каждой точки системы, т. е.

$$\bar{F}_k+\bar{R}_k+\bar{\Phi}_k=0, \quad k=1, 2, ..., N, \tag{23}$$

где $\bar{F}_k$ — активная сила; $\bar{R}_k$ — сила реакции связей; $\bar{\Phi}_k$ — сила инерции точки. Умножая скалярно каждое из этих соотношений на возможное перемещение точки $\delta\bar{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k+\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k\cdot\delta\bar{r}_k+\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k\cdot\delta\bar{r}_k=0. \tag{24}$$

Это и есть **общее уравнение динамики для системы с любыми связями**. Обычно его применяют для систем с идеальными связями, для которых выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k\cdot\delta\bar{r}_k=0.$$

В этом случае (24) принимает одну из форм

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k+\bar{\Phi}_k)\cdot\delta\bar{r}_k=0; \quad \sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k-m_k\bar{a}_k)\cdot\delta\bar{r}_k=0;$$

$$\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}_k-m_k\ddot{\bar{r}}_k)\cdot\delta\bar{r}_k=0, \tag{25}$$

так как сила инерции через ускорение $\bar{a}_k$ относительно инерциальной системы отсчета выражается в форме

$$\bar{\Phi}_k=-m_k\bar{a}_k=-m_k\ddot{\bar{r}}_k,$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор точки.

Таким образом, согласно общему уравнению динамики, *в любой момент движения системы с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных сил и сил инерции точек системы равна нулю на любом возможном перемещении системы, допускаемом связями.* Общее уравнение динамики (24) часто называют **объединенным принципом Даламбера — Лагранжа**. Его можно назвать также **общим уравнением механики**. Оно в случае равновесия системы при обращении в нуль всех сил инерции точек системы переходит в принцип возможных перемещений статики, только пока без доказательства его достаточности для равновесия системы.

Общему уравнению динамики можно придать другие, эквивалентные формы. Раскрывая скалярное произведение векторов, его можно выразить в виде

$$\sum_{k=1}^{N} \left[(F_{kx}+\Phi_{kx})\delta x_k+(F_{ky}+\Phi_{ky})\delta y_k+(F_{kz}+\Phi_{kz})\delta z_k\right]=0,$$

где x_k, y_k, z_k — координаты k-й точки системы. Учитывая, что проекции сил инерции на оси координат через проекции ускорений на эти оси выражаются соотношениями

$$\Phi_{kx}=-m_k a_{kx}=-m_k\ddot{x}_k; \quad \Phi_{ky}=-m_k a_{ky}=-m_k\ddot{y}_k;$$
$$\Phi_{kz}=-m_k a_{kz}=-m_k\ddot{z}_k,$$

общему уравнению динамики можно придать форму

$$\sum_{k=1}^{N} \left[(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k)\delta y_k+(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k)\delta z_k\right]=0. \tag{25'}$$

В этом виде его называют **общим уравнением динамики в аналитической форме**.

Общее уравнение динамики для систем, подчиненных голономным, идеальным, неосвобождающим связям, дает полную информацию о движении таких систем, т. е. из него аналогично

тому, как из принципа возможных перемещений получались условия равновесия системы, можно получить полную систему дифференциальных уравнений. Для вывода этих уравнений следует использовать понятия обобщенных координат и обобщенных сил.

Пусть имеется система, подчиненная голономным, идеальным, неосвобождающим связям. Предположим, что она имеет n степеней свободы и, следовательно, ее положение в пространстве определяется обобщенными координатами q_1, q_2, ..., q_n. Радиус-вектор каждой точки системы в общем случае нестационарных связей зависит от обобщенных координат и времени, т. е. $\bar{r}_k=\bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_n, t)$. Для возможного перемещения $\delta\bar{r}_k$ имеем

$$\delta\bar{r}_k=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\,\delta q_i, \tag{26}$$

так как время при этом считается неизменным. Подставляя (26) в общее уравнение динамики (25), после перемены порядка суммирования по k и i получим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0. \tag{27}$$

Используя обобщенные силы активных сил Q_i и сил инерции $Q_i^{(\Phi)}$, т. е.

$$Q_i=\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}; \quad Q_i^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}, \tag{28}$$

из (27) получим общее уравнение динамики в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i+Q_i^{(\Phi)})\delta q_i=0. \tag{29}$$

Обобщенные координаты системы независимы, вариации этих координат не только независимы, но и произвольны. Последовательно принимая только одну из вариаций обобщенных координат не равной нулю, а все остальные — равными нулю, из (29) получаем следующую систему условий:

$$Q_i+Q_i^{(\Phi)}=0, \quad i=1, 2, ..., n. \tag{30}$$

Условия (30) можно назвать **принципом Даламбера для системы, выраженным через обобщенные силы**. Из (30) следуют условия равновесия системы $Q_i=0$, $i=1$, 2, ..., n, если силы инерции точек системы, а следовательно, и обобщенные силы инерции равны нулю.

При использовании общего уравнения динамики необходимо уметь вычислять элементарную работу сил инерции системы на возможных перемещениях. Для этого применяются соответствующие формулы для элементарной работы, полученные

для обычных сил. Рассмотрим их применение для сил инерции твердого тела в частных случаях его движения.

При поступательном движении. В этом случае тело имеет три степени свободы и вследствие наложенных связей может совершать только поступательное движение. Возможные перемещения тела, которые допускают связи, тоже являются поступательными.

Силы инерции при поступательном движении приводятся к равнодействующей $\bar{\Phi}^*=-M\bar{a}_C=-M\bar{a}$. Для суммы элементарных работ сил инерции на поступательном возможном перемещении тела получим

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k\cdot\delta\bar{r}_k=\bar{\Phi}^*\cdot\delta\bar{r}_C=\bar{\Phi}^*\cdot\delta\bar{r}=-M\bar{a}\cdot\delta\bar{r},$$

где $\delta\bar{r}_C=\delta\bar{r}$ — возможное перемещение центра масс и любой точки тела, так как поступательное возможное перемещение у всех точек тела одинаково; одинаковы и ускорения, т. е. $\bar{a}_C=\bar{a}$.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Тело в этом случае имеет одну степень свободы. Оно может вращаться вокруг неподвижной оси Oz. Возможное перемещение, которое допускается наложенными связями, является тоже поворотом тела на элементарный угол $\delta\varphi$ вокруг неподвижной оси.

Силы инерции, приведенные к точке O на оси вращения, сводятся к главному вектору $\bar{\Phi}$ и главному моменту $\bar{L}_O^{(\Phi)}$. Главный вектор сил инерции приложен к неподвижной точке, и его элементарная работа на возможном перемещении равна нулю. У главного момента сил инерции не равную нулю элементарную работу совершит только его проекция на ось вращения $L_z^{(\Phi)}=-J_z\varepsilon$. Таким образом, для суммы работ сил инерции на рассматриваемом возможном перемещении имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{\Phi}_k\cdot\delta\bar{r}_k=L_z^{(\Phi)}\delta\varphi=-J_z\varepsilon\delta\varphi,$$

если угол $\delta\varphi$ сообщить в направлении дуговой стрелки углового ускорения ε.

При плоском движении. Связи, наложенные на твердое тело, допускают в этом случае только плоское возможное перемещение. В общем случае оно состоит из поступательного возможного перемещения вместе с полюсом, за который выберем центр масс, и поворота на элементарный угол $\delta\varphi$ вокруг оси Cz, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости, параллельно которой может совершать тело плоское движение.

Так как силы инерции при плоском движении твердого тела можно привести к главному вектору $\bar{\Phi}$ и главному моменту $\bar{L}_C^{(\Phi)}$ (если за центр приведения выбрать центр масс),

Если пренебречь силами трения, то связи в рассматриваемой задаче можно считать идеальными. Они неосвобождающие и стационарные.

Декартовы координаты точки M_1: x_1, z_1; ползуна D: 0, z_2. Применение общего уравнения динамики к регулятору дает

$$2\Phi\delta x_1+2P\delta z_1-2F\delta x_1+Q\delta z_2=0. \tag{а}$$

При составлении этого уравнения отдельно вычислена элементарная работа сил на возможных перемещениях для шара M_1. Чтобы учесть элементарную работу таких же сил для шара M_2, результат надо удвоить. Работа силы упругости пружин F', приложенных к ползуну E, равна нулю.

Для модулей сил инерции Φ и упругости F имеем

$$\Phi=\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)\omega^2; \quad F=c\lambda=cl\sin\varphi, \tag{б}$$

где λ — удлинение пружины.

Для установления зависимости между вариациями координат точек получим предварительно зависимость самих координат от угла φ:

$$x_1=l_1+l\sin\varphi; \quad z_1=l\cos\varphi; \quad z_2=2l\cos\varphi.$$

Варьируя эти зависимости, имеем:

$$\delta x_1=l\cos\varphi\delta\varphi; \quad \delta z_1=-l\sin\varphi\delta\varphi; \quad \delta z_2=-2l\sin\varphi\delta\varphi. \tag{в}$$

Все вариации координат выразились через вариацию одного угла φ; следовательно, система имеет одну степень свободы.

Подставляя значения величин из (б) и (в) в (а), после сокращения на $2l\delta\varphi$ получаем

$$\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)\omega^2 l\cos\varphi-P\sin\varphi-cl\sin\varphi\cos\varphi-Q\sin\varphi=0. \tag{а'}$$

Разделив обе части этого соотношения на $\cos\varphi$, получаем искомую зависимость между ω и φ:

$$\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)l\omega^3-P\operatorname{tg}\varphi-cl\sin\varphi-Q\operatorname{tg}\varphi=0,$$

или

$$\omega^2=\frac{(P+Q)\operatorname{tg}\varphi+cl\sin\varphi}{Pl(l_1+l\sin\varphi)}g.$$

Пример 2. Призма A, сила тяжести которой P_1, расположена на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 101). По грани призмы, наклоненной к горизонту на угол α, может двигаться груз B, имеющий силу тяжести P_2. Груз B прикреплен к призме с помощью пружины, имеющей жесткость c.

Определить движение призмы A и груза B по призме, если в начальный момент система находилась в покое и пружина была не деформирована. Силами трения груза B о призму A пренебречь.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем x и s. Связи системы неосвобождающие, стационарные и идеальные, так как поверхности тел гладкие.

Активными силами являются силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и силы упругости пружины $\bar{F}$ (рис. 102).

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах для случая двух степеней свободы можно выразить в форме

$$Q_1+Q_1^{(\Phi)}=0; \quad Q_2+Q_2^{(\Phi)}=0. \tag{а}$$

Здесь Q_1 и Q_2 — обобщенные силы, отнесенные к обобщенным координатам x и s; $Q_1^{(\Phi)}$ и $Q_2^{(\Phi)}$ — обобщенные силы инерции, отнесенные к тем же координатам.

Если пренебречь силами трения, то связи в рассматриваемой задаче можно считать идеальными. Они неосвобождающие и стационарные.

Декартовы координаты точки M_1: x_1, z_1; ползуна D: 0, z_2. Применение общего уравнения динамики к регулятору дает

$$2\Phi\delta x_1+2P\delta z_1-2F\delta x_1+Q\delta z_2=0. \tag{а}$$

При составлении этого уравнения отдельно вычислена элементарная работа сил на возможных перемещениях для шара M_1. Чтобы учесть элементарную работу таких же сил для шара M_2, результат надо удвоить. Работа силы упругости пружин F', приложенных к ползуну E, равна нулю.

Для модулей сил инерции Φ и упругости F имеем

$$\Phi=\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)\omega^2; \quad F=c\lambda=cl\sin\varphi, \tag{б}$$

где λ — удлинение пружины.

Для установления зависимости между вариациями координат точек получим предварительно зависимость самих координат от угла φ:

$$x_1=l_1+l\sin\varphi; \quad z_1=l\cos\varphi; \quad z_2=2l\cos\varphi.$$

Варьируя эти зависимости, имеем:

$$\delta x_1=l\cos\varphi\delta\varphi; \quad \delta z_1=-l\sin\varphi\delta\varphi; \quad \delta z_2=-2l\sin\varphi\delta\varphi. \tag{в}$$

Все вариации координат выразились через вариацию одного угла φ; следовательно, система имеет одну степень свободы.

Подставляя значения величин из (б) и (в) в (а), после сокращения на $2l\delta\varphi$ получаем

$$\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)\omega^2 l\cos\varphi-P\sin\varphi-cl\sin\varphi\cos\varphi-Q\sin\varphi=0. \tag{а'}$$

Разделив обе части этого соотношения на $\cos\varphi$, получаем искомую зависимость между ω и φ:

$$\frac{P}{g}(l_1+l\sin\varphi)l\omega^3-P\operatorname{tg}\varphi-cl\sin\varphi-Q\operatorname{tg}\varphi=0,$$

или

$$\omega^2=\frac{(P+Q)\operatorname{tg}\varphi+cl\sin\varphi}{Pl(l_1+l\sin\varphi)}g.$$

Пример 2. Призма A, сила тяжести которой P_1, расположена на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 101). По грани призмы, наклоненной к горизонту на угол α, может двигаться груз B, имеющий силу тяжести P_2. Груз B прикреплен к призме с помощью пружины, имеющей жесткость c.

Определить движение призмы A и груза B по призме, если в начальный момент система находилась в покое и пружина была не деформирована. Силами трения груза B о призму A пренебречь.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем x и s. Связи системы неосвобождающие, стационарные и идеальные, так как поверхности тел гладкие.

Активными силами являются силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ и силы упругости пружины $\bar{F}$ (рис. 102).

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах для случая двух степеней свободы можно выразить в форме

$$Q_1+Q_1^{(\Phi)}=0; \quad Q_2+Q_2^{(\Phi)}=0. \tag{а}$$

Здесь Q_1 и Q_2 — обобщенные силы, отнесенные к обобщенным координатам x и s; $Q_1^{(\Phi)}$ и $Q_2^{(\Phi)}$ — обобщенные силы инерции, отнесенные к тем же координатам.

404

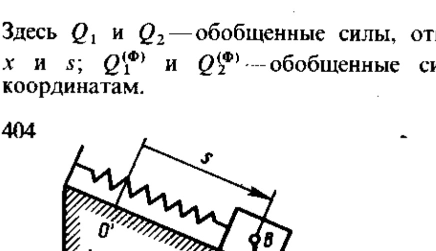

Рис. 101

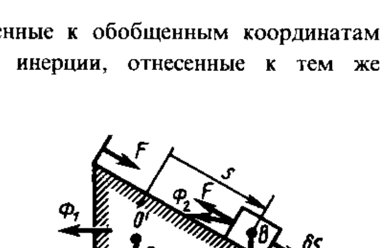

Рис. 102

Обобщенные силы для координаты x вычисляем по формулам

$$Q_1=\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_x}{\delta x}; \quad Q_1^{(\Phi)}=\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_x}{\delta x}, \tag{б}$$

где $\bar{F}_k$ — активная сила, приложенная к k-й точке системы; $\bar{\Phi}_k$ — сила инерции для той же точки. Индекс x в числителе указывает, что сумму элементарных работ на возможных перемещениях точек $\delta\bar{r}_k$ следует вычислять при изменении только координаты x, считая координату s при этом постоянной.

Дав возможное перемещение δx в направлении возрастания координаты x, имеем по формуле (б) $Q_1=0$, так как силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ перпендикулярны возможному перемещению, а силы упругости (одна приложена к грузу; другая, равная первой, но противоположная по направлению, — к призме в точке закрепления пружины) в сумме дают элементарную работу, равную нулю при постоянном s.

Для обобщенной силы инерции соответственно имеем

$$Q_1^{(\Phi)}=\frac{-\Phi_1\delta x-\Phi_{2x}\delta x}{\delta x}=-(\Phi_1+\Phi_{2x})=-\frac{P_1\ddot{x}+P_2(\ddot{s}\cos\alpha+\ddot{x})}{g}=$$
$$=-\frac{(P_1+P_2)\ddot{x}+P_2\ddot{s}\cos\alpha}{g},$$

так как проекции сил инерции призмы и груза на ось Ox

$$\Phi_{1x}=\frac{P_1}{g}\ddot{x}; \quad \Phi_{2x}=\frac{P_2}{g}(\ddot{s}\cos\alpha+\ddot{x}).$$

Обобщенные силы Q_2 и $Q_2^{(\Phi)}$ на возможном перемещении δs, направленном в сторону возрастания координаты s, при неизменном значении координаты x вычисляем по формулам

$$Q_2=\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_s}{\delta s}; \quad Q_2^{(\Phi)}=\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)_s}{\delta s}. \tag{в}$$

Имеем

$$Q_2=\frac{P_2\sin\alpha\delta s-F\delta s}{\delta s}=P_2\sin\alpha-F=P_2\sin\alpha-c(\lambda_{ст}+s)=-cs,$$

так как сила упругости $F=c\lambda=c(\lambda_{ст}+s)$, если s отсчитывать от положения статического равновесия груза B; $\lambda_{ст}$ — статическое удлинение пружины под действием силы тяжести груза B в положении равновесия. В положении статического равновесия действующие на груз силы удовлетворяют условиям равновесия. Проецируя их на ось $O's$, получаем из условий равновесия

$$P_2\sin\alpha-c\lambda_{ст}=0.$$

Для обобщенной силы инерции имеем

$$Q_2^{(\Phi)}=\frac{-\Phi_{2s}\delta s}{\delta s}=-\frac{P_2}{g}(\ddot{s}+\ddot{x}\cos\alpha),$$

где Φ_{2s} — проекция силы инерции груза B на ось $O's$.

Подставляя полученные значения обобщенных сил в (а), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$(P_1+P_2)\ddot{x}+P_2\cos\alpha\ddot{s}=0; \quad -cs-\frac{P_2}{g}(\ddot{s}+\ddot{x}\cos\alpha)=0. \tag{а'}$$

Исключая из второго уравнения (а') с помощью первого $\ddot{x}$, имеем следующее уравнение для s:

$$\ddot{s}+\frac{(P_1+P_2)cg}{P_2[P_1+P_2(1-\cos^2\alpha)]}s=0,$$

или

$$\ddot{s}+k^2 s=0, \tag{г}$$

где

$$k^2=\frac{(P_1+P_2)cg}{P_2[P_1+P_2(1-\cos^2\alpha)]}.$$

Интегрируя (г), получим

$$s=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \tag{г'}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем по начальным условиям

$$t=0; \quad s=-\lambda_{ст}=-\frac{P_2\sin\alpha}{c}; \quad \dot{s}=0.$$

Дифференцируя (г'), имеем

$$\dot{s}=-C_1 k\sin kt+C_2 k\cos kt. \tag{г''}$$

Из (г') и (г'') при $t=0$ получаем

$-\lambda_{ст}=C_1; \quad C_2=0.$

После этого имеем

$$s=-\lambda_{ст}\cos kt=-\frac{P_2\sin\alpha}{c}\cos\sqrt{\frac{(P_1+P_2)cg}{P_2(P_1+P_2\sin^2\alpha)}}\,t.$$

Подставляя значения $\ddot{s}$ из (г) в первое из уравнений (а'), получаем следующее дифференциальное уравнение для x:

$$\ddot{x}=\frac{P_2 k^2\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}\cos kt. \tag{д}$$

Интегрируя его, имеем

$$\dot{x}=\frac{P_2 k\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}\sin kt+C_3. \tag{д'}$$

Интегрируя второй раз, получим

$$x=-\frac{P_2\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}\cos kt+C_3 t+C_4. \tag{д''}$$

Постоянные C_3 и C_4 определяем, используя начальные условия

$$t=0, \quad x=0, \quad \dot{x}=0.$$

Из (д'), (д'') и начальных условий имеем

$$0=C_3; \quad 0=-\frac{P_2\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}+C_4,$$

или

$$C_3=0; \quad C_4=\frac{P_2\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}.$$

После этого

$$x=\frac{P_2\lambda_{ст}\cos\alpha}{P_1+P_2}(1-\cos kt).$$